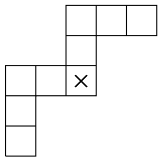
Kombinatorik

Værktøjskasse

- Indfør passende variable og vær systematisk!
- Tæl antal kombinationer
  - Man kan sætte r elementer i rækkefølge på $r!$ måder.
  - Man kan udtage 2 elementer ud af n på $\frac{n(n-1)}{2}$ måder. (Man kan udtage r elementer ud af n på $\frac{n!}{r!(n-r)!}$).
- Skuffeprincippet: Skuffeprincippet siger at hvis man har n skuffer og mere end n bolde i de n skuffer, så må der være mindst en skuffe med mindst to bolde.
- Del op i hvornår noget er lige, og hvornår noget er ulige.

Eksempler

A. Indfør passende variable og vær systematisk!
Cifrene fra 1 til 9 er placeret i figuren nedenfor med ét ciffer i hvert kvadrat. Summen af tre tal placeret i samme vandrette eller lodrette linje er 13. Vis at det eneste tal der kan stå på den markerede plads, er 4.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2004)



Løsning Idéen er her at lægge mærke til at hvis vi lægger cifrene i hver af de to lodrette søjler og cifrene i hver af de to vandrette søjler sammen, så er der tre cifre der indgår to gange, nemlig dem der både er i en række og en søjle. De tre cifre kalder vi a, b og c. Hvis cifrene fra 1 til 9 er placeret så hver søjle- og rækkesum er 13, så må summen af cifrene i hver af de to søjler og summen af cifrene i hver af de to rækker tilsammen være $4 \cdot 13 = 52$. I denne sum indgår alle cifrene fra 1 til 9 en gang, og cifrene vi kalder a, b og c endnu engang. Altså er $1+2+3+4+5+6+7+8+9+a+b+c = 52$, dvs. $a+b+c = 7$.

De eneste tre cifre med sum 7 er cifrene 1, 2 og 4. Derfor må a, b og c være 1, 2 og 4. Hvis 1 eller 2 er placeret på det markerede felt, vil cifrene 1 og 2 indgå i samme række eller samme søjle, dvs. de skal sammen med endnu et ciffer have sum 13, men det er umuligt. Altså må der stå 4 i det markerede felt.

B. Tæl antal kombinationer
Til et stævne med ti hold uddeles en guld-, sølv- og bronzemedalje. På hvor mange måder kan medaljerne uddeles?

Løsning Først lægger vi mærke til at vi skal udvælge tre hold til guld, sølv og bronze, og at rækkefølgen er vigtig da det bestemt ikke er det samme om et hold får guld eller bronze. Der er 10 muligheder for at vælge det hold der skal have guld. For hver af disse er der 9 muligheder for at vælge det hold der skal have sølv, og for hver af disse kombinationer endnu 8 muligheder for at vælge det hold der skal have bronze. Samlet er der altså $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ forskellige måder at fordele guld, sølv og bronze til de ti hold.

C. Skuffeprincippet
I en børnehave skal 22 børn hver vælge to klodser i forskellige farver, og der er i alt syv forskellige farver klodser at vælge imellem. Kan børnene vælge klodser så der ikke findes to børn der vælger klodser i de samme farver?

Løsning Her er idéen at bruge skuffeprincippet. Skufferne skal her repræsentere mulighederne for farvevalg, og børnene putter vi ned i skuffen der repræsenterer deres farvevalg. Derfor regner vi først ud hvor mange skuffer der er, dvs. på hvor mange måder man kan vælge to farver ud af syv. Det kan man på $\frac{7\cdot 6}{2} = 21$ måder. Da der er 22 børn, men kun 21 farvevalg, må der altså ifølge skuffeprincippet være mindst to børn med samme farvevalg.

D. Del op i hvornår noget er lige, og hvornår noget er ulige
Tretten personer sidder ved et rundt bord. Er det muligt at man for hvert par af personer som sidder ved siden af hinanden, får et ulige tal når man lægger deres aldre sammen? Samme spørgsmål med ”lige”.

Løsning Summen af to tal er ulige netop hvis det ene er lige og det andet er ulige. (Her er der selvfølgelig tale om hele tal). Hvis man for hvert par af personer der sidder ved siden af hinanden, får et ulige tal når man lægger deres aldre sammen, må den enes alder være ulige og den andens alder være lige. Det betyder at hver anden person rundt om bordet har en lige alder, men det kan ikke lade sig gøre når der er et ulige antal til bords.

Og hvad så hvis det er en lige sum? Summen af to tal er lige hvis enten begge tal er lige, eller begge tal er ulige. Hvis fx alle personerne har en lige alder (eller alle har en ulige alder), så kan det godt lade sig gøre at summen af aldrene af hvert nabopar er lige.

Opgaver

Opgave 1 Georg har syv helt ens almindelige terninger. (Husk at 1 og 6 står overfor hinanden, 2 og 5 står over for hinanden og 3 og 4 står over for hinanden). Er det muligt for Georg at stable disse terninger til et tårn, så summen af de syv tal på den ene side af tårnet er den samme som summen på hver af de andre tre sider?

Opgave 2 I et magisk kvadrat med ni felter skal tallene fra 1 til 9 indsættes så der er et tal i hvert felt, og så summen af tallene i alle rækker, søjler og diagonaler er den samme. Georg har allerede indsat tallene 2 og 5 som vist på figuren. På hvor mange måder kan han indsætte de sidste syv tal?

		2
	5	

Opgave 3 Danmark har spillet en fodboldlandskamp mod Georgien. Kampen sluttede 5-5, og mellem første og sidste mål har kampen på intet tidspunkt stået lige. Intet land har scoret tre mål i træk, og Danmark scorede det sjette mål. Kan man ud fra disse oplysninger afgøre hvilket land der scorede det femte mål?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2008)

Opgave 4 Georg skriver tallene fra 1 til 15 på hvert sit stykke papir. Han forsøger at lægge papirerne i to bunker så ingen af bunkerne indeholder to tal hvis sum er et kvadrattal. Bevis at det ikke kan lade sig gøre. (Kvadrattallene er tallene $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ osv.).
(Georg Mohr-Konkurrencen 2011)

Opgave 5 Ti venner sender hinanden julekort så hver sender fem julekort til fem forskellige venner. Vis at der findes et par af venner som har sendt hinanden et julekort.

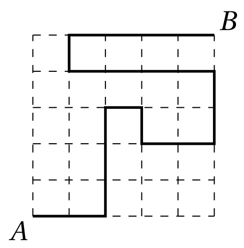
Opgave 6 De viste ni bolde skal anbringes i nummerrækkefølge (med nummer 1 længst til venstre) ved hjælp af så få operationer som muligt. Hver operation består i at tage en bold og flytte den hen til højre for alle de andre. Hvad er det mindste antal operationer man kan nøjes med?

4 7 5 1 6 2 9 3 8

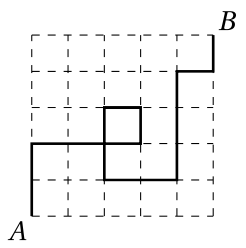
Opgave 7 I en hat ligger 1992 sedler med alle numre fra 1 til 1992. På tilfældig måde trækkes to sedler samtidig fra hatten; differencen mellem tallene på de to sedler skrives på en ny seddel som lægges i hatten, mens de to udtrukne sedler kastes bort. Der fortsættes på denne måde indtil der kun er en seddel tilbage i hatten. Vis at der på denne seddel står et lige tal.
(Georg Mohr-Konkurrencen 1992)

Opgave 8 Tallene fra 1 til 500 er skrevet på tavlen. To spillere A og B sletter skiftevis ét tal ad gangen, og A sletter det første tal. Hvis summen af de to sidste tal på tavlen er delelig med 3, vinder B, i modsat fald vinder A. Hvilken spiller kan lægge en strategi der sikrer denne spiller sejren?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2008)

Opgave 9 Forestil dig et kvadratisk skema der består af $n \times n$ felter med kantlængde 1, hvor n er et vilkårligt positivt helt tal. Hvad er den størst mulige længde af en rute du kan følge langs felternes kanter fra punktet A i nederste venstre hjørne til punktet B i øverste højre hjørne hvis du aldrig må vende tilbage til et punkt hvor du har været før? (Figuren viser for $n = 5$ et eksempel på en tilladt rute og et eksempel på en ikke tilladt rute).
(Georg Mohr-Konkurrencen 2009)



Tilladt rute



Ikke tilladt rute

Løsningsskitser

Opgave 1 Idéen er at lægge mærke til at summen af tallene på to modstående sider af tårnet tilsammen er $7\cdot 7=49$. Da dette er et ulige tal, kan summen af tallene på de to sider ikke være den samme.

Opgave 2 Det centrale er først at udregne hvad summen af hver søjle, række og diagonal skal være. Da summen af tallene fra 1 til 9 er 45, må summen af tre rækker være 45, dvs. summen af en række 15. Vi kender allerede to tal i en diagonal. Det sidste bliver derfor nødt til at være $15-5-2=8$.

	$\times$	2
	5	$\times$
8		

Nu lægger vi mærke til at 8 ikke kan placeres i samme række eller søjle som hverken 7 eller 9, for så bliver summen for høj. Derfor skal der stå 7 og 9 i de to markerede felter. De kan placeres på to forskellige måder. Herefter er det ikke svært at se at resten af tallene er givet, og at det hele kommer til at gå op. Der er altså to forskellige måder at indsætte de resterende syv tal i det magiske kvadrat.

Opgave 3 Georgien scorede det femte mål. For at vise dette antager vi det modsatte og viser at dette er umuligt. Antag at Danmark scorede det femte mål. Da Danmark også scorede det sjette mål, og intet land har scoret tre mål i træk, må Georgien have scoret det fjerde mål. De tre første mål kan ikke være scoret af samme land da ingen har scoret tre mål i træk. Altså har enten Georgien eller Danmark scoret netop et af de tre første mål. Hvis Georgien scorede netop et af de tre første mål, stod det lige efter fjerde mål, hvilket er umuligt. Hvis Danmark scorede netop et af de tre første mål, stod det lige efter sjette mål, hvilket også er umuligt. Antagelsen om at Danmark har scoret det femte mål, er derfor forkert, og eneste mulighed er at Georgien har scoret det femte mål. (Mulige scoringsrækkefølger er ddgdgdgdgg og ggdggddgdd).

Opgave 4 Antag at Georg har lagt papirerne i to bunker så ingen af bunkerne indeholder to tal hvis sum er et kvadrattal. Bunken som indeholder papiret med tallet 1, kaldes A, og den anden bunke kaldes B. Da $1+3$, $3+6$, $6+10$, $10+15$, $15+1$ er kvadrattal, så gælder: 1 i bunke A, 3 i bunke B, 6 i bunke A, 10 i bunke B, 15 i bunke A og 1 i bunke B. Altså skal papiret med tallet 1 ligge i begge bunker. Det antagne er altså umuligt.

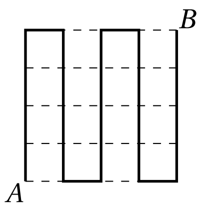
Opgave 5 Der er i alt $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ par af venner. Da der er sendt $5\cdot 10=50$ julekort, må der ifølge skuffeprincippet være mindst et par som har udvekslet to julekort, dvs. de har sendt julekort til hinanden.

Opgave 6 Alle de bolde der IKKE flyttes, ender længst til venstre i den rækkefølge de står i til at starte med. Tallene 1, 2 og 3 står i den rigtige rækkefølge i forhold til hinanden, men 4 gør ikke. Derfor bliver man nødt til at flytte alle bolde med tal større end 3, dvs. mindst seks bolde. Det kan godt lade sig gøre kun at flytte seks bolde ved at flytte boldene 4, 5, 6, 7, 8 og 9 i denne rækkefølge.

Opgave 7 I hvert træk vil antallet af sedler med ulige tal enten reduceres med to (nemlig hvis der fjernes to ulige sedler og dermed lægges en lige) eller være uændret (hvis der fjernes to lige og lægges en lige, eller hvis der fjernes en lige og en ulige og lægges en ulige). Da antallet af sedler med ulige tal fra start af er lige (nemlig $\frac{1992}{2}=996$), vil det derfor vedblive med at være lige. Antallet af ulige sedler når der kun er én seddel tilbage, er derfor nul. Den sidste seddel bærer dermed et lige nummer.

Opgave 8 Spiller B har en strategi så B vinder uanset hvordan A spiller. De 500 tal kan opdeles i 250 par så n parres med $501-n$ for $n=1,2,3,\ldots,250$. Med denne parring har hvert par summen 501, og hvert af de 500 tal indgår i netop et par. Hver gang spiller A sletter et tal fra et par, sletter B umiddelbart efter det andet tal i parret. Hver gang A skal trække, har alle tal på tavlen derfor en makker på tavlen, og det er altså altid muligt for B at følge denne strategi. Når der kun er to tal tilbage på tavlen, danner de derfor et par med sum 501 som er delelig med 3. Dermed vinder spiller B ved at følge denne strategi.

Opgave 9 Et skema der består af $n \times n$ felter, indeholder $(n+1)^2$ gitterpunkter, og da man starter i et gitterpunkt og for hvert skridt ender i et nyt gitterpunkt, kan en rute ikke være længere end $(n+1)^2 - 1$. Hvis n er lige, er det muligt at konstruere en rute af denne længde på følgende måde: Start i A og gå n skridt op. Gå derefter et skridt til højre, n skridt ned, et skridt til højre, n skridt op, osv. Da n er lige, skal vi gå et lige antal skridt til højre for at nå B, og vi ender dermed med at gå op efter vores sidste skridt til højre, dvs. vi ender i B efter at have været gennem samtlige gitterpunkter i kvadratet. På figuren er vist et eksempel med $n = 4$. Når n er lige, er den maksimale længde af en tilladt rute dermed $(n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$.



Når n er ulige, er det ikke muligt at konstruere en rute som går gennem alle gitterpunkter: Farv gitterpunkterne grønne og gule så gitterpunkter på en lodret linje er skiftevis gule og grønne, og gitterpunkter på en vandret linje også er skiftevis gule og grønne. På denne måde får A og B samme farve, og hvert eneste skridt på ruten går mellem to gitterpunkter af forskellig farve, og dermed vil en rute fra A til B indeholde et lige antal skridt. En rute gennem alle gitterpunkter indeholder $(n+1)^2-1$ skridt, men $(n+1)^2-1$ er ulige når n er ulige, og det er dermed umuligt at gå gennem alle gitterpunkter når n er ulige. Man kan til gengæld konstruere en rute gennem alle på nær ét gitterpunkt på følgende måde: Start i A og gå som før n skridt op. Gå derefter et skridt til højre, n skridt ned, et skridt til højre, n skridt op og så videre, men stop efter at have taget samlet $n-1$ skridt til højre. Tag herefter endnu et skridt til højre, et skridt op, et skridt til venstre, et skridt op, et skridt til højre, osv. Da n er ulige, vil denne rute ende i B efter et sidste skridt op, og derfor er det eneste gitterpunkt ruten ikke går igennem, gitterpunktet umiddelbart til venstre for B. På figuren er vist et eksempel med $n = 5$. Når n er ulige, er den maksimale længde af en rute dermed $(n+1)^2 - 2 = n^2 + 2n - 1$.